R２　大阪府(Ｃ)　公立　数学　問題

数-20-公-大阪(Ｃ)-問-01

1　次の問いに答えなさい。

問１　$\frac{3}{8}a^2b\div\frac{9}{4}ab^2\times(-3b)^2$　を計算しなさい。

問２　$\frac{6-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$　を計算しなさい。

問３　二次方程式　$(x-1)^2-7(x-1)-8=0$　を解きなさい。

問４　関数 $y=\frac{a}{x}$ (a は定数) について,x の値が 3 から 5 まで増加するときの変化の割合が 1 であるとき,a の値を求めなさい。

問５　三つの袋 A，B，C があり，袋 A には玉が 8 個，袋 B には玉が 10 個，袋 C には玉が 4 個入っている。また，二つの箱 P，Q があり，箱 P には自然数の書いてある 3 枚のカード [2] , [3] , [4] が入っており，箱 Q には奇数の書いてある 3 枚のカード [1] , [3] , [5] が入っている。P，Q それぞれの箱から同時にカードを 1 枚ずつ取り出し,次の**操作**を行った後に,袋 A に入っている玉の個数を a,袋 B に入っている玉の個数を b，袋 C に入っている玉の個数を c とする。このとき，$a<b<c$ となる確率はいくらですか。P，Q それぞれの箱において，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えなさい。

> **操作**：箱 P から取り出したカードに書いてある数と同じ個数の玉を袋 A から取り出して袋 C に入れ，箱 Q から取り出したカードに書いてある数と同じ個数の玉を袋 B から取り出して袋 C に入れる。

問６　タケシさんは，過去 10 年間の Y 市の 4 月 1 日における最高気温を調べてその平均値を求めたが,10 年のうちのある 2 年の最高気温が 2.6℃と 16.2℃であり,他の年の最高気温と大きく異なっていることに気が付いた。そこで，この 2 年を除いた 8 年の最高気温の平均値を求めたところ，新しく求めた平均値は，初めに求めた 10 年の最高気温の平均値より 0.3℃高くなった。次の文中の [　　] に入れるのに適している数を書きなさい。

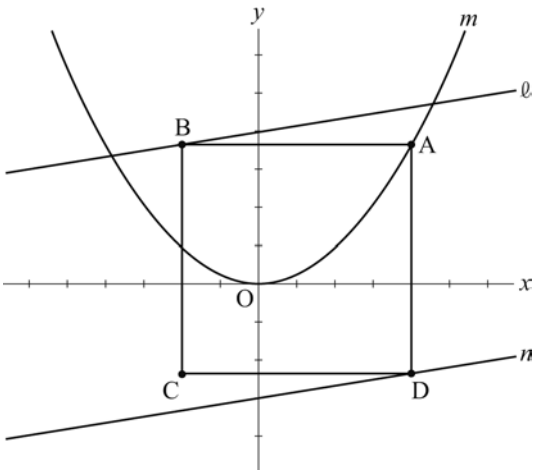
> タケシさんが初めに求めた 10 年の最高気温の平均値は [　　] ℃であった。

問7　次の二つの条件を同時に満たす自然数 n の値を求めなさい。

・2020－n の値は 93 の倍数である。

・n－780 の値は素数である。

問8　a，b を正の定数とする。右図において，m は関数 $y=ax^2$ のグラフを表し，ℓ は関数 $y=bx+4$ のグラフを表す。n は ℓ と平行な直線であり，その切片は－3 である。四角形 ABCD は正方形であり，辺 AB は x 軸に平行であって，辺 AD は y 軸に平行である。A は m 上にあり，その x 座標は 4 である。B は ℓ 上にあり，D は n 上にある。C の x 座標は－2 であり，C の y 座標は B の y 座標より小さい。a，b の値をそれぞれ求めなさい。途中の式を含めた求め方も書くこと。ただし，座標軸の 1 めもりの長さは 1 cm であるとする。



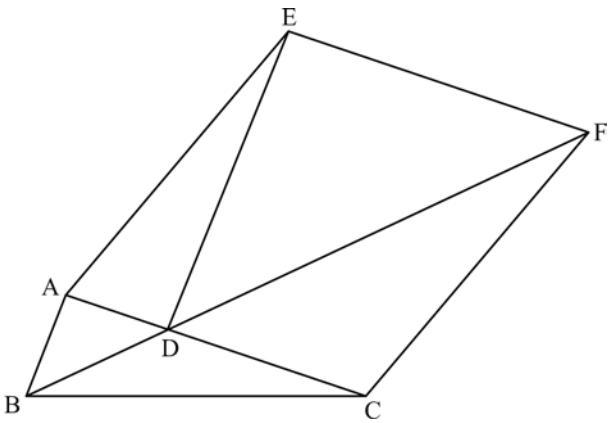
数-20-公-大阪(C)-問-02

2　**図1**，**図2** において，△ABC は内角∠BAC が鈍角の三角形であり，AB＜AC である。△DAE≡△ABC であり，D は辺 AC 上にあって，E は直線 AC について B と反対側にある。このとき，AB // ED である。B と D とを結ぶ。このとき，△ABD は AB＝AD の二等辺三角形である。F は，E を通り辺 AC に平行な直線と直線 BD との交点である。F と C とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。

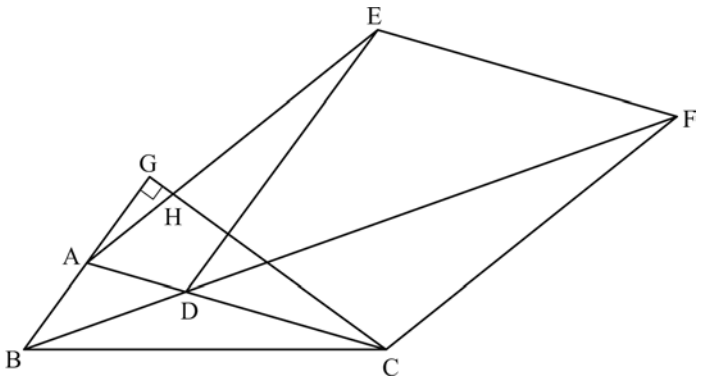
問1　**図1** において，四角形 EACF は平行四辺形であることを証明しなさい。

図1



問2　**図2**において，AB＝2 cm，AC＝6 cm である。G は C から直線 AB にひいた垂線と直線 AB との交点であり，GA＝2 cm である。H は，線分 GC と辺 EA との交点である。

図2



(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 線分 EH の長さを求めなさい。

(3) 四角形 EHCF の面積を求めなさい。

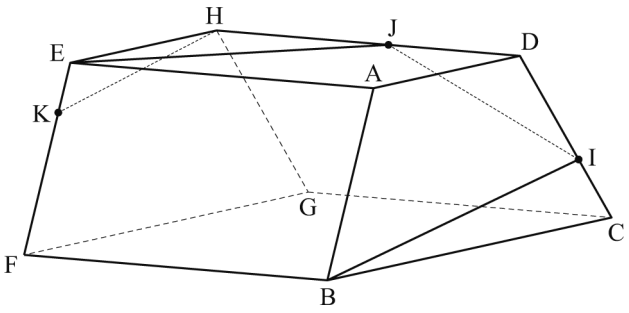
数-20-公-大阪(C)-問-03

3　**図1**，**図2**において，立体 ABCD－EFGH は四角柱である。四角形 ABCD は AD // BC の台形であり，AD＝4 cm，BC＝8 cm，AB＝DC＝5 cm である。四角形 EFGH≡四角形 ABCD である。四角形 FBCG は 1 辺の長さが 8 cm の正方形であり，四角形 EFBA，EADH，HGCD は長方形である。このとき，平面 EADH と平面 FBCG は平行である。

次の問いに答えなさい。

問1　**図1**において，I は辺 DC 上の点であり，DI＝3 cm である。J は，辺 HD 上にあって線分 EJ の長さと線分 JI の長さとの和が最も小さくなる点である。I と B とを結ぶ。K は，H を通り線分 IB に平行な直線と辺 EF との交点である。

図1



(1) △EJH の面積を求めなさい。

(2) △IBC の内角∠IBC の大きさを $a°$，△EKH の内角∠EKH の大きさを $b°$ とするとき，四角形 ABID の内角∠BID の大きさを a，b を用いて表しなさい。

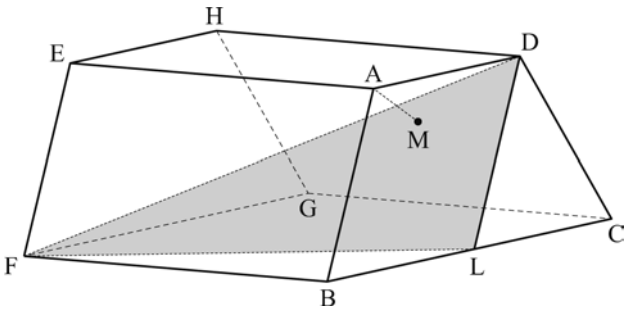
(3) 線分 KF の長さを求めなさい。

問２　**図２**において, D と F とを結ぶ。L は, D を通り辺 EF に平行な直線と辺 BC との交点である。F と L とを結ぶ。このとき, △DFL の内角∠DLF は鈍角である。M は，A から平面 DFL にひいた垂線と平面 DFL との交点である。このとき, M は△DFL の内部にある。

(1) 線分 DF の長さを求めなさい。

(2) 線分 AM の長さを求めなさい。

図２



R２　大阪府(Ｃ)　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-大阪(C)-KY-01	1	問1			
		問2			
		問3			
		問4			
		問5			
		問6			
		問7			
		問8	〔求め方〕 a の値　　，b の値		

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-20-公-大阪(C)-KY-02	2	問１	〔証　明〕			
		問２	(1)	cm		
			(2)	cm		
			(3)	cm^2		
数-20-公-大阪(C)-KY-03	3	問１	(1)	cm^2		
			(2)	度		
			(3)	cm		
		問２	(1)	cm		
			(2)	cm		

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-20-公-大阪(C)-k-01	1	問1	$\frac{3}{2}ab$	4	
		問2	$-3+\sqrt{2}$	4	
		問3	$x=0$，$x=9$	4	
		問4	-15	4	
		問5	$\frac{4}{9}$	6	
		問6	10.6	6	
		問7	811	6	
		問8	〔求め方〕 A は m 上の点だから　A $(4,\ 16a)$ B はℓ 上の点であり，B の x 座標は-2 だから B $(-2,\ -2b+4)$ A の y 座標と B の y 座標は等しいから $16a=-2b+4$ …… ㋐ ℓ // n だから，n の式は　$y=bx-3$ D は n 上の点であり，D の x 座標は 4 だから D $(4,\ 4b-3)$ よって　AD$=16a-4b+3$ (cm) 四角形 ABCD は正方形であり，AB$=6$ (cm) だから $16a-4b+3=6$ …… ㋑ ㋐，㋑を連立させて解くと $a=\frac{11}{48}$，$b=\frac{1}{6}$ ―――― (＊) a の値　$\frac{11}{48}$　，b の値　$\frac{1}{6}$	8	・部分点を与える。 ・(＊) において，「この a，b の値は問題に適している。」という記述を省略している。この記述がなくても減点の対象とはしない。

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-20-公-大阪(C)-K-02	2	問1	〔証　明〕 仮定より　EF // AC …… ㋐ △ABD は AB＝AD の二等辺三角形だから 　∠ABD＝∠ADB …… ㋑ AB // ED であり，平行線の同位角は等しいから 　∠EDF＝∠ABD …… ㋒ EF // AC であり，平行線の同位角は等しいから 　∠EFD＝∠ADB …… ㋓ ㋑，㋒，㋓より　∠EDF＝∠EFD よって，△EDF は二等辺三角形だから 　EF＝ED …… ㋔ △ABC≡△DAE だから　CA＝ED …… ㋕ ㋔，㋕より　EF＝CA …… ㋖ ㋐，㋖より，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから， 四角形 EACF は平行四辺形である。		8	部分点を与える。
		問2	(1)	$4\sqrt{3}$ cm	4	
			(2)	$\frac{14\sqrt{3}}{5}$ cm	6	
			(3)	$\frac{102\sqrt{2}}{5}$ cm^2	6	
数-20-公-大阪(C)-K-03	3	問1	(1)	$\frac{64}{7}$ cm^2	4	
			(2)	$2a+b$ 度	4	
			(3)	$\frac{15}{4}$ cm	4	
		問2	(1)	11 cm	6	
			(2)	$\frac{8\sqrt{21}}{11}$ cm	6	

R２　大阪府(Ｃ)　公立　数学　解説

数-20-公-大阪(C)-KS-01

1　【小問集合】

〈大阪府（C）大問１の傾向〉

①　**問１**　式の計算，**問２**　根号をふくむ式の計算，**問３**　２次方程式，**問４**　反比例，**問５**　確率，**問６**　資料の整理・連立方程式の利用，**問７**　整数の性質，**問８**　関数のグラフと図形

②　**問７**を除けばすべて標準レベルの問題。公式や例題の丸暗記では対応できないため，各単元についての深い理解が必要となる。**問７**についてはかなり応用的であり，整数についてのさらに深い理解が必要である。

問５　２つの箱 P，Q からのカードの取り出し方を樹形図に表し，**操作**によって３つの袋の玉の個数がそれぞれどのようになるかをまとめると右のようになる。よって，求める確率は$\frac{4}{9}$である。

P	Q	玉の個数(個) A	B	C	
2	1	6	9	7	
	3	6	7	9	○
	5	6	5	11	
3	1	5	9	8	
	3	5	7	10	○
	5	5	5	12	
4	1	4	9	9	
	3	4	7	11	○
	5	4	5	13	○

ポイント》複雑な条件となっている確率の問題は，「そもそも何を行っているのか」に着目する。

→この問題では「それぞれ３枚ずつのカードが入っている２つの箱からそれぞれ１枚ずつカードを取り出す」ということを行っているので，まずはその樹形図をかく。

問６　10年の最高気温の平均値をx℃，文章中における２年を除いた８年の最高気温の合計をy℃とする。

まず，10年の最高気温の平均値を求める式を立てると，$\frac{y+2.6+16.2}{10}=x \Rightarrow y=10x-18.8$ … ①

次に，８年の最高気温の平均値を求める式を立てると，$\frac{y}{8}=x+0.3 \Rightarrow y=8x+2.4$ … ②

①，②を連立方程式として解くと，$(x, y)=(10.6, 87.2)$　よって，□に入る値は10.6である。

問７　$2020-n$の値が93の倍数であることから，整数kを用いると，$2020-n=93k$となり，自然数nは$n=2020-93k$と表せる。

これを$n-780$に代入すると，$n-780=2020-93k-780=1240-93k=31(40-3k)$と表せる。

$40-3k$は整数なので，$31(40-3k)$すなわち$n-780$は31の倍数である。これが素数となるには，31の倍数かつ素数である自然数を考えればよい。これを満たす自然数は31しかないので，

$31(40-3k)=31$より，$k=13$だから，$n=2020-93k=811$

数-20-公-大阪(C)-KS-02

2　【平面図形】

問１

ポイント》図形問題において発想を広げるコツは「キーワード」を見つけること！

今回のキーワードは「平行四辺形であることを証明」「二等辺三角形」「平行」

・「平行四辺形であることを証明」→ 仮定により EF//AC がすでに分かっているため，ある四角形が平行四辺形になるための条件を満たすには，「EA//FC」または「AC＝EF」が分かればよい。「EA//FC」を示すには同位角または錯角が等しいことを示すことができればよいが，図中に同位角や錯角がないため「AC＝EF」の方をねらう。

・「二等辺三角形」「平行」→「底角」「同位角・錯角」をねらえることがわかる。

問２　(1) △ACG において三平方の定理により，$CG^2=AC^2-GA^2=6^2-2^2=32$

$CG>0$ より $CG=4\sqrt{2}$(cm)

△BCG において三平方の定理により，$BC^2=BG^2+CG^2=4^2+(4\sqrt{2})^2=48$

$BC>0$ より $BC=4\sqrt{3}$(cm)

ポイント》図形問題において発想を広げるコツは「キーワード」を見つけること！

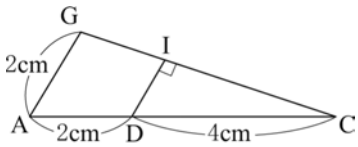
今回のキーワードは「垂線」

・「垂線」→「三平方の定理」をねらえることがわかる。

(2) 線分 GC と線分 DE との交点を I とする。仮定より DI//AG だから△ACG において平行線と線分の比を考える(**図１**)と，AB＝AD＝2(cm)より，CD : CA＝DI : AG　⇒　4 : 6＝DI : 2

⇒　$DI=\frac{4}{3}$(cm)

図１



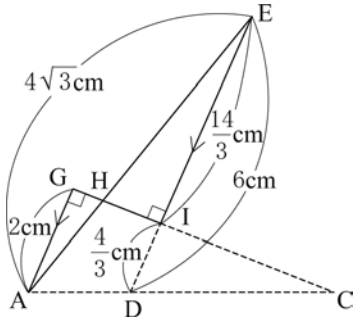
同様に AG//IE だから△AHG と△EHI において平行線と線分の比を考える(**図２**)と，△DAE≡△ABC から DE＝AC＝6(cm)より，

AH : EH＝AG : EI　⇒　AH : EH＝2 : $\frac{14}{3}$＝3 : 7

⇒　$EH=\frac{7}{10}AE$

ここで，AE＝BC＝$4\sqrt{3}$(cm)より，$EH=\frac{7}{10}\times4\sqrt{3}=\frac{14}{5}\sqrt{3}$(cm)

図２



ポイント》図形問題において発想を広げるコツは「キーワード」を見つけること！

今回のキーワードは「平行」「△DAE≡△ABC」

・「平行」→「平行線と線分の比」をねらう。

・「△DAE≡△ABC」→ 対応する辺の長さがそれぞれ等しいことを使う。

(3) **(2)**と同様にして，CI の長さを求める。まず△ACG(**図１**)において平行線と線分の比により，

CD : CA＝CI : CG　⇒　4 : 6＝CI : $4\sqrt{2}$　⇒　$CI=\frac{8}{3}\sqrt{2}$(cm)

$\triangle CDE=\frac{1}{2}\times DE\times CI=\frac{1}{2}\times6\times\frac{8}{3}\sqrt{2}=8\sqrt{2}$(cm^2)

図３において，△ADE : △CDE＝AD : DC より，

△ADE : $8\sqrt{2}$＝2 : 4　⇒　△ADE＝$4\sqrt{2}$(cm^2)

よって，△ACE＝△ADE＋△CDE＝$12\sqrt{2}$(cm^2)

四角形 EACF は平行四辺形なので，△ACE＝△CEF＝$12\sqrt{2}$(cm^2)

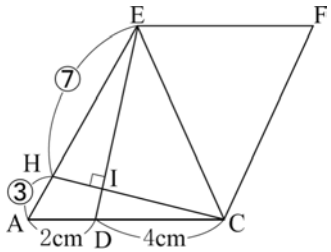
また，△CAH : △CEH＝AH : HE＝3 : 7 より，

$\triangle CEH=\frac{7}{10}\triangle ACE=\frac{42}{5}\sqrt{2}$(cm^2)

よって，(四角形 EHCF)＝△CEH＋△CEF＝$\frac{42}{5}\sqrt{2}+12\sqrt{2}$

＝$\frac{102}{5}\sqrt{2}$(cm^2)

図３



ポイント》図形問題において発想を広げるコツは「キーワード」を見つけること！

今回のキーワードは「平行四辺形」「四角形の面積」

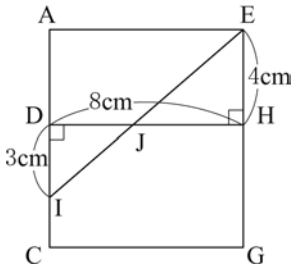
・「平行四辺形」→ 対角線で切ることで合同で面積の等しい三角形 2 つに分けることができる。

・「四角形の面積」→ 今回は HE//CF の台形ではあるが，高さを求めるのが難しいので，別の方法を模索する。平行四辺形の一部であること，ED⊥CH なので一部の面積を求めることができることに注目する。

3 【空間図形】

問1 **(1)** 立体の展開図における面 ADHE, 面 DCGH に注目する(**図1**)。

図1



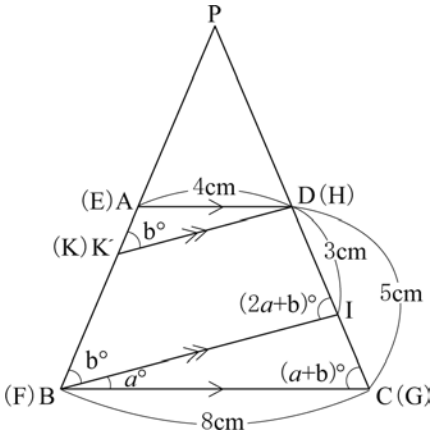
DI//EH より，平行線と線分の比により，DJ：HJ＝DI：HE＝3：4

⇒ $HJ=\frac{4}{7}DH=\frac{4}{7}\times 8=\frac{32}{7}$(cm)

よって，$\triangle EJH=\frac{1}{2}\times HJ\times HE=\frac{1}{2}\times\frac{32}{7}\times 4=\frac{64}{7}$(cm^2)

(2) 合同な四角形 ABCD と四角形 EFGH を重ねてかいた図を用いる(**図2**)。

図2



四角形 EFGH における K の位置にある点を K´とする。

K´D//BI より同位角は等しいので,

∠AK´D＝∠ABI＝b°　よって，∠ABC＝a＋b(°)

四角形 ABCD は等脚台形なので,

∠ABC＝∠DCB＝a＋b(°)

△BCI において外角の性質により,

∠BID＝∠IBC＋∠DCB＝a＋(a＋b)＝2a＋b(°)

(3) **図2**において, 直線 AB と直線 DC の交点を P とする。

AD//BC より，平行線と線分の比により,

PD：PC＝AD：BC　⇒　PD：(PD＋5)＝4：8

⇒　PD＝5(cm)，PC＝10(cm)

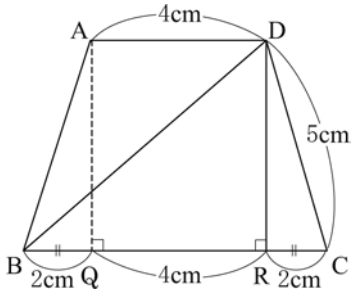
∠PBC＝∠PCB より，△PBC は二等辺三角形なので，PB＝PC＝10(cm)

K´D//BI より，平行線と線分の比により，PK´：K´B＝PD：DI　⇒　PK´：K´B＝5：3

⇒　$K'B=\frac{3}{8}PB=\frac{3}{8}\times 10=\frac{15}{4}$(cm)　よって，KF＝K´B＝$\frac{15}{4}$(cm)

問2 **(1)** FB⊥(面 ABCD)より，FB⊥DB だから，△DFB において三平方の定理を用いて線分 DF の長さを求めることができる。そこで線分 BD の長さを求めるために，台形 ABCD を取り出して考える(**図3**)。

図3



点 A，D から辺 BC に垂線 AQ，DR をそれぞれ引くと，

△AQB≡△DRC となり，BQ＝CR であることがわかる。

また，四角形 AQRD は長方形なので，AD＝QR＝4(cm)であるから，BQ＝CR＝(8－4)÷2＝2(cm)

△CDR において三平方の定理により,

$DR^2=DC^2-CR^2=5^2-2^2=21$　DR＞0 より $DR=\sqrt{21}$(cm)

△BDR において三平方の定理により，$BD^2=BR^2+DR^2=6^2+(\sqrt{21})^2=57$

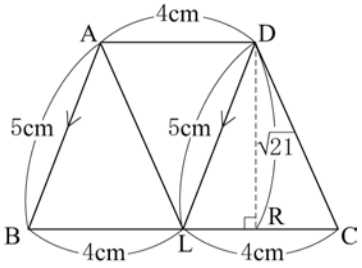
BD＞0 より $BD=\sqrt{57}$(cm)

△DFB において三平方の定理により，$DF^2=BF^2+BD^2=8^2+(\sqrt{57})^2=121$

DF＞0 より DF＝11(cm)

(2) 線分 AM の長さは，三角錐 A－DFL において△DFL を底面としたときの高さを表す。さらに，三角錐 A－DFL は，△ADL を底面とした場合に体積を求めることができるので，体積からの逆算で AM の長さを求める。

図4



まずは，三角錐 A－DFL の体積を求めるために，底面である△ADL の面積を求める(**図4**)。

(1)で求めた DR の長さを用いて，

$\triangle ADL=\frac{1}{2}\times AD\times DR=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}\,(cm^2)$

△ADL を底面としたときの三角錐 A－DFL の高さは，平面 ABCD と平面 EFGH との距離 BF＝8(cm)に等しい。

よって，(三角錐 A－DFL)$=\frac{1}{3}\times\triangle ADL\times BF=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{21}\times 8=\frac{16\sqrt{21}}{3}\,(cm^3)$

次に逆算によって AM の長さを求めるために，△DFL の面積を求める。

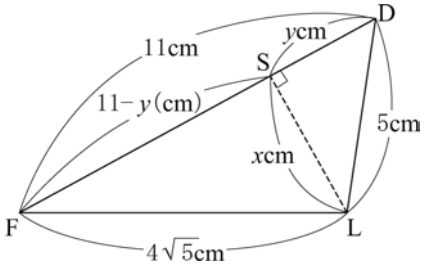
EF//DL，EF//AB より，AB//DL だから，四角形 ADBL は平行四辺形なので，

AD＝BL＝4(cm)，AB＝DL＝5(cm)

△BFL において三平方の定理により，$FL^2=BF^2+BL^2=8^2+4^2=80$　FL＞0 より $FL=4\sqrt{5}$(cm)

ここで，△DFL を取り出して考える(**図5**)。

図5



辺 DF を底辺としたときの△DFL の高さを LS＝x cm とし，DS＝y cm とする。

△LDS において三平方の定理により，$LS^2+DS^2=DL^2$

⇒　$x^2+y^2=25$ … ①

△LFS において三平方の定理により，$LS^2+FS^2=FL^2$

⇒　$x^2+(11-y)^2=80$　⇒　$x^2+y^2-22y+121=80$ … ②

②に①を代入すると，$25-22y+121=80$　⇒　$y=3$(cm)

これを①に代入すると，$x^2+3^2=25$　⇒　$x^2=16$　⇒　$x>0$ より $x=4$(cm)

よって，$\triangle DFL=\frac{1}{2}\times DF\times LS=\frac{1}{2}\times 11\times 4=22\,(cm^2)$

したがって，(三角錐 A－DFL)$=\frac{1}{3}\times\triangle DFL\times AM=\frac{1}{3}\times 22\times AM=\frac{22}{3}AM\,(cm^3)$だから，

$\frac{22}{3}AM=\frac{16\sqrt{21}}{3}$より，$AM=\frac{8\sqrt{21}}{11}$(cm)