H31　埼玉県　公立　数学　問題

※「問題Ａと問題Ｂ（学校選択）を掲載」

数-19-公-埼玉-問-01A

1 **【問題Ａ】**　次の各問に答えなさい。

問１　$-2a+5a$　を計算しなさい。

問２　$(-8)\div(-4)-1$　を計算しなさい。

問３　$3x^2\div(-y^2)\times 2xy^3$　を計算しなさい。

問４　$\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{45}$　を計算しなさい。

問５　$x^2+6x-27$　を因数分解しなさい。

問６　連立方程式　$\begin{cases} y=5-3x \\ x-2y=4 \end{cases}$　を解きなさい。

問７　2 次方程式　$2x^2-3x-1=0$　を解きなさい。

問８　y が x の 1 次関数で，そのグラフが 2 点　$(4,\ 3),\ (-2,\ 0)$　を通るとき，この 1 次関数の式を求めなさい。

問９　下の**図１**のような，１組の三角定規があります。この１組の三角定規を，**図２**のように，頂点Ａと頂点Ｄが重なるように置き，辺ＢＣと辺ＥＦとの交点をＧとします。

∠BAE＝25 ℃のとき，∠CGF の大きさ x を求めなさい。

図１

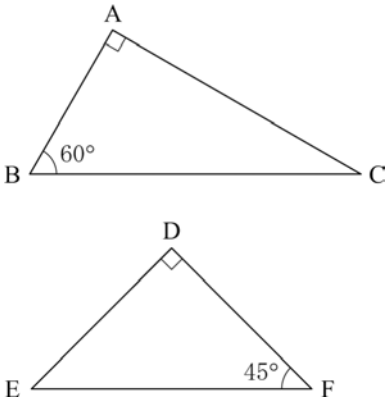
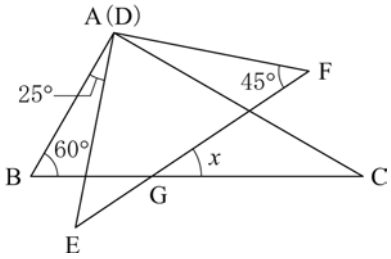


図２



問 10　関数　$y=x^2$　について述べた次の**ア**～**オ**の中から，正しいものを**２つ**選び，その記号を書きなさい。

ア　この関数のグラフは，点 (3，6) を通る。

イ　この関数のグラフは放物線で，y 軸について対称である。

ウ　x の変域が　$-1 \leqq x \leqq 2$　のときの y の変域は　$1 \leqq y \leqq 4$　である。

エ　x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合は 6 である。

オ　$x<0$ の範囲では，x の値が増加するとき，y の値は増加する。

問 11 次は，先生，A さん，B さんの会話です。これを読んで，下の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

先　生「縦 20 cm，横 50 cm の長方形の赤い布と縦 20 cm，横 30 cm の長方形の白い布を使って，縦 20 cm，横 5 m のゴールテープを作ろうと思います。」

A さん「どのように作るのですか。」



先　生「布は切らずに，ゴールテープの縦の長さは 20 cm にそろえて，横は布と布を 5 cm ずつ重ねて縫い合わせます。」

A さん「赤い布と白い布は何枚あるのですか。」

先　生「どちらもたくさんあります。」

B さん「A さん, 赤い布と白い布は横の長さが違うけれど, ちょうど 5 m にできるのかな。」

A さん「赤い布だけなら，［ ア ］枚使って 5 m にできるよ。」

B さん「赤い布と白い布の両方を使って，ちょうど 5m になる枚数の組はあるのかな。」

A さん「どうだろう。考えてみよう。」

(1) ［ ア ］にあてはまる数を書きなさい。

(2) 赤い布と白い布の両方を使って，ちょうど 5 m になる赤い布と白い布の枚数の組を，赤い布を x 枚，白い布を y 枚として，途中の説明も書いて**すべて**求めなさい。

数-19-公-埼玉-問-01B

1 **【問題B】** 次の各問に答えなさい。

問 1 $(-a)^3 \div 2a^4 \times \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ を計算しなさい。

問 2 $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}$ を計算しなさい。

問 3 2 次方程式 $2x(x+3)=(x+3)^2$ を解きなさい。

問 4 2 つの数の組 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ について，「＊」の記号は，

$(a,\ b)*(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

のように計算するものとします。次の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

(1) $(1,\ -2)*(3,\ 1)$ を計算しなさい。

(2) $(x,\ y)*(2,\ 3)=(-17,\ 7)$ のとき，x，y の値を求めなさい。

問５　下の**図１**のような，１組の三角定規があります。この１組の三角定規を，**図２**のように，頂点Ａと頂点Ｄが重なるように置き，辺ＢＣと辺ＥＦとの交点をＧとします。

∠BAE＝25 ℃のとき，∠CGF の大きさ x を求めなさい。

図１

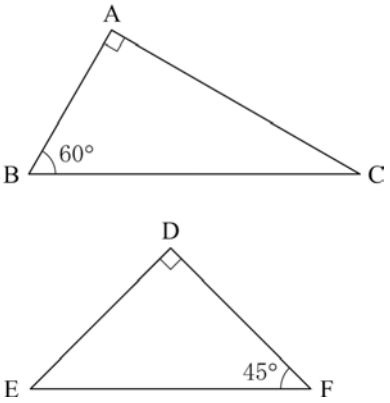
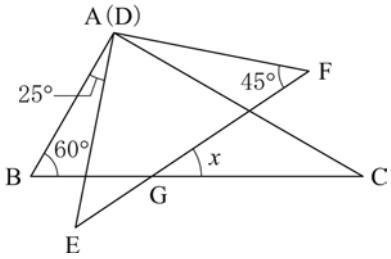


図２



問６　関数　$y=x^2$　について述べた次の**ア**～**オ**の中から，正しいものを**すべて**選び，その記号を書きなさい。

ア　この関数のグラフは，点 (3，6) を通る。

イ　この関数のグラフは放物線で，y 軸について対称である。

ウ　x の変域が　$-1 \leqq x \leqq 2$　のときの y の変域は　$1 \leqq y \leqq 4$　である。

エ　x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合は 6 である。

オ　$x<0$ の範囲では，x の値が増加するとき，y の値は増加する。

問７　白色のペットボトルキャップが入っている袋があります。この袋の中に，同じ大きさのオレンジ色のキャップを 50 個入れてよく混ぜ，無作為に 30 個を抽出しました。抽出したキャップのうち，オレンジ色のキャップは 6 個でした。はじめにこの袋の中に入っていたと考えられる白色のキャップは，およそ何個と推測されるか求めなさい。



問８　次は，先生，A さん，B さんの会話です。これを読んで，下の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

先　生　「縦 20 cm，横 50 cm の長方形の赤い布と縦 20 cm，横 30 cm の長方形の白い布を使って，縦 20 cm，横 5 m のゴールテープを作ろうと思います。」

A さん　「どのように作るのですか。」



先　生　「布は切らずに，ゴールテープの縦の長さは 20 cm にそろえて，横は布と布を 5 cm ずつ重ねて縫い合わせます。」

A さん　「赤い布と白い布は何枚あるのですか。」

先　生　「どちらもたくさんあります。」

B さん　「A さん, 赤い布と白い布は横の長さが違うけれど, ちょうど 5 m にできるのかな。」

A さん　「赤い布だけなら，［ **ア** ］枚使って 5 m にできるよ。」

B さん　「赤い布と白い布の両方を使って，ちょうど 5 m になる枚数の組はあるのかな。」

A さん　「どうだろう。考えてみよう。」

(1) ［ **ア** ］にあてはまる数を書きなさい。

(2) 赤い布と白い布の両方を使って，ちょうど 5 m になる赤い布と白い布の枚数の組を，赤い布を x 枚，白い布を y 枚として，途中の説明も書いて**すべて**求めなさい。

数-19-公-埼玉-問-02A

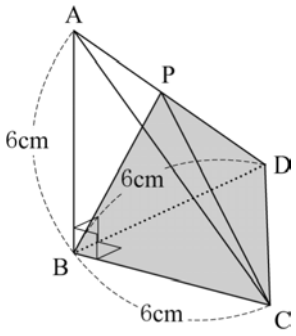
2 【問題Ａ】　次の各問に答えなさい。

問１　白色のペットボトルキャップが入っている袋があります。この袋の中に，同じ大きさのオレンジ色のキャップを 50 個入れてよく混ぜ，無作為に 30 個を抽出しました。抽出したキャップのうち，オレンジ色のキャップは 6 個でした。はじめにこの袋の中に入っていたと考えられる白色のキャップは，およそ何個と推測されるか求めなさい。



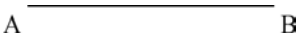
問２　右の図のような，AB＝BC＝BD＝6 cm，∠ABC＝∠ABD＝∠CBD＝90 °の三角錐 ABCD があり，辺 AD 上に AP：PD＝1：2 となる点 P をとります。

このとき，三角錐 PBCD の体積を求めなさい。



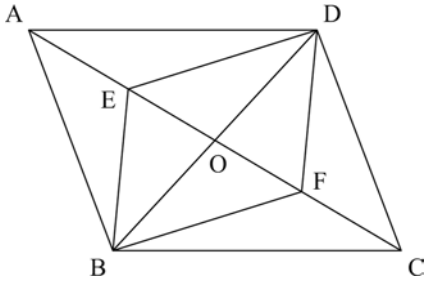
問３　下の図のように，線分 AB があります。∠CAB＝105 °となる半直線 AC をコンパスと定規を使って 1 つ作図しなさい。

ただし，作図するためにかいた線は，消さないでおきなさい。



問４　右の図のように, 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，線分 OA，OC 上に，AE＝CF となる点 E，F をそれぞれとります。

このとき, 四角形 EBFD は平行四辺形であることを証明しなさい。



数-19-公-埼玉-問-02B

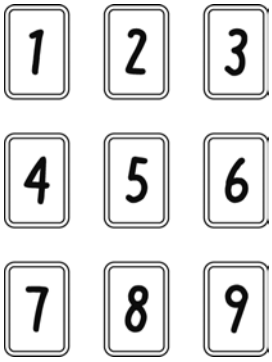
2 **【問題B】** 次の各問に答えなさい。

問1 下の図のように，線分 AB があります。∠CAB＝105 °となる半直線 AC をコンパスと定規を使って 1 つ作図しなさい。

ただし，作図するためにかいた線は，消さないでおきなさい。



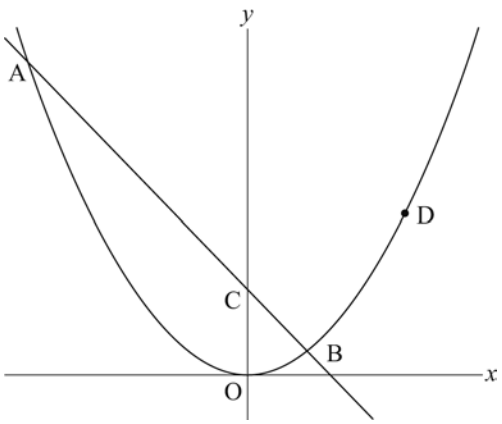
問2 下の図のように，1 から 9 までの数字がそれぞれ 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがあります。この 9 枚のカードから 3 枚を同時に取り出すとき，3 枚のカードの数字の和が 3 で割り切れる場合は全部で何通りあるか求めなさい。



数-19-公-埼玉-問-03

3 右の図において，曲線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフで，直線は関数 $y=ax+2$ $(a<0)$ のグラフです。直線と曲線との交点のうち x 座標が負である点を A，正である点を B とし，直線と y 軸との交点を C とします。また，曲線上に x 座標が 3 である点 D をとります。

このとき，次の各問に答えなさい。



問1 △OCD の面積を求めなさい。

ただし，座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

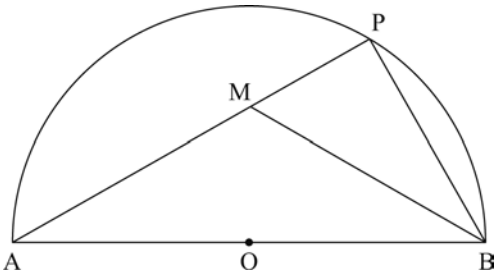
問2 △ADC の面積が，△CDB の面積の 4 倍になるとき，a の値を求めなさい。

数-19-公-埼玉-問-04

4 右の**図1**のように，線分 AB を直径とする半円 O の$\overset{\frown}{AB}$上に点 P をとります。また，線分 AP 上に AM：MP＝2：1 となる点 M をとり，線分 BM をひきます。

AB＝6 cm，∠ABP＝60 °のとき，次の各問に答えなさい。

図1

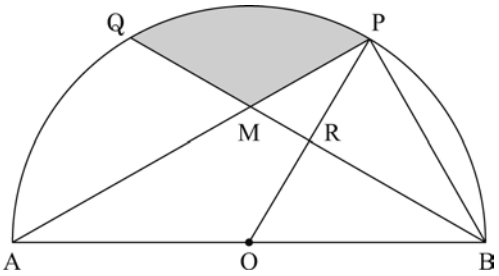


問1 線分 PM の長さを求めなさい。

問2 右の**図2**のように，線分 BM を延長し，$\overset{\frown}{AP}$との交点を Q とします。また，線分 OP をひき，線分 BQ との交点を R とします。

このとき，次の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

図2



(1) 半円 O を，線分 BQ を折り目として折ったとき，点 P は点 O と重なります。その理由を説明しなさい。

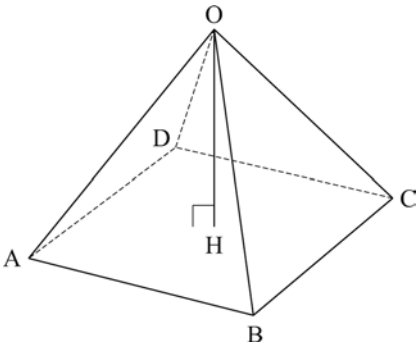
(2) **図2**のかげ（　）をつけた部分の面積を求めなさい。ただし，円周率はπとします。

数-19-公-埼玉-問-05B

5 **【問題B】** 右の**図1**のような，正方形 ABCD を底面とし，OA＝OB＝OC＝OD の正四角錐 OABCD があります。頂点 O から底面の正方形 ABCD に垂線をひき，底面の正方形 ABCD との交点を H とします。

このとき，次の各問に答えなさい。

図1



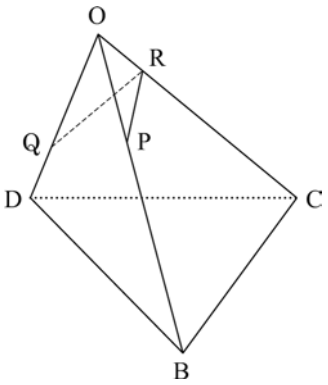
問1 △OHA と△OHB が合同であることを証明しなさい。

問２　底面の正方形 ABCD の 1 辺の長さが 6 cm，OA＝OB＝OC＝OD＝6 cm のとき，次の**(1)**，**(2)**に答えなさい。

(1) 線分 OH の長さを求めなさい。

(2) 右の**図２**のように，正四角錐 OABCD を 3 点 O，B，D を通る平面で切って，三角錐 OBCD の辺 OB 上に OP＝2 cm となる点 P，辺 OD 上に OQ＝4 cm となる点 Q をとります。辺 OC 上に点 R をとり，PR＋RQ の長さが最も短くなるとき，三角錐 OPRQ の体積を途中の説明も書いて求めなさい。その際，解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。

図２



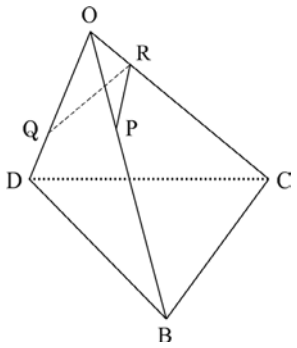
H31　埼玉県　公立　数学　解答用紙

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-19-公-埼玉-N-01A	1 問題A	問1				
		問2				
		問3				
		問4				
		問5				
		問6	$x=$　　，$y=$			
		問7	$x=$			
		問8	$y=$			
		問9	度			
		問10	と			
		問11	(1)	枚		
			(2)	〔説明〕 (答え)		

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-19-公-埼玉-KY-01B	1 問題 B	問1				
		問2				
		問3	$x=$			
		問4	(1)	(　　,　　)		
			(2)	$x=$　　, $y=$		
		問5	度			
		問6				
		問7	およそ　　個			
		問8	(1)	枚		
			(2)	〔説明〕 (答え)		

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-19-公-埼玉-IV-02A	2 問題A	問1	およそ　　個		
		問2	cm^3		
		問3	A ＿＿＿＿＿＿＿＿ B		
		問4	〔証明〕		
数-19-公-埼玉-IV-02B	2 問題B	問1	A ＿＿＿＿＿＿＿＿ B		
		問2	通り		
数-19-公-埼玉-IV-03	3	問1	cm^2		
		問2	$a=$		

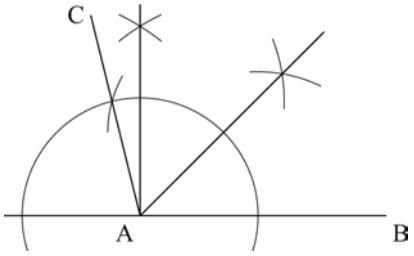
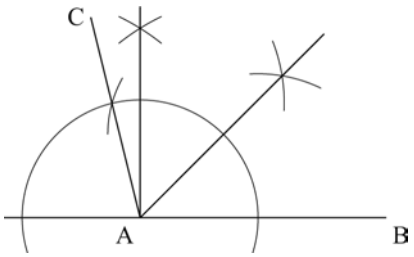
	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-19-公-埼玉-N-04	4	問1	PM＝　　cm			
		問2	(1)	〔説明〕		
			(2)	cm^2		

	問題番号			解　　答	配点	備　考
数-19-公-埼玉-KY-05B	5 問題B	問１		〔証明〕		
		問２	(1)	OH＝　　cm		
			(2)	〔説明〕  答え　　cm^3		

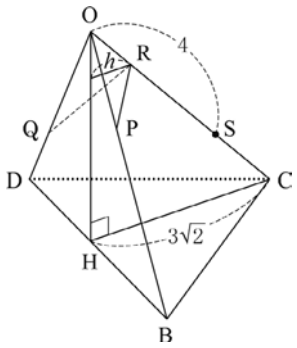
数学　解答

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-19-公-埼玉-K-01A	1 問題A	問1	$3a$	4	
		問2	1	4	
		問3	$-6x^3y$	4	
		問4	$-\sqrt{5}$	4	
		問5	$(x-3)(x+9)$	4	
		問6	$x=2,\ y=-1$	4	
		問7	$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$	4	
		問8	$y=\frac{1}{2}x+1$	4	
		問9	40　(度)	4	
		問10	**イ**　と　**エ**	5	
		問11 (1)	11　(枚)	4	
		問11 (2)	〔説明〕 (例) 赤い布と白い布を 5 cm ずつ重ねるので, $45x+25y+5=500$ この式を満たす x, y の値の組は, x に 10 までの自然数を代入して, $(x,\ y)=(1,\ 18),\ (6,\ 9)$ (答え)　赤い布 1 枚と白い布 18 枚, 赤い布 6 枚と白い布 9 枚	6	内容に応じて部分点を認める。

	問題番号			解　　答	配点	備　　考
数・19・公・埼玉・K 01B	1 問題 B	問1		$-\frac{a}{8}$	4	
		問2		$\frac{5}{6}$	4	
		問3		$x=\pm 3$	4	
		問4	(1)	(5, −5)	4	
			(2)	$x=-1$, $y=5$	4	
		問5		40　(度)	4	
		問6		**イ，エ**	5	
		問7		(およそ)　200　(個)	5	
		問8	(1)	11　(枚)	4	
			(2)	〔説明〕 (例) 赤い布と白い布を 5 cm ずつ重ねるので， $45x+25y+5=500$ この式を満たす x, y の値の組は，x に 10 までの自然数を代入して， $(x, y)=(1, 18), (6, 9)$ (答え)　赤い布 1 枚と白い布 18 枚， 赤い布 6 枚と白い布 9 枚	6	内容に応じて部分点を認める。

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-19-公-埼玉-K-02A	2 問題A	問1	(およそ)　200　(個)	5	
		問2	24　(cm^3)	5	
		問3	(例)  	5	内容に応じて部分点を認める。
		問4	〔証明〕 (例) 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから， OA＝OC……① OB＝OD……② 仮定から， AE＝CF ……③ ①，③から， OA－AE＝OC－CF よって， OE＝OF……④ ②，④から，対角線がそれぞれの中点で交わるので，四角形 EBFD は平行四辺形である。	7	要点をおさえ，論理の筋道がとおっているものは，正答とする。 内容に応じて部分点を認める。
数-19-公-埼玉-K-02B	2 問題B	問1	(例)  	5	内容に応じて部分点を認める。
		問2	30　(通り)	6	
数-19-公-埼玉-K-03	3	問1	3　(cm^2)	4	
		問2	$a=-\frac{3}{2}$	6	

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-19-公-埼玉-K04	4	問1	(PM)＝ $\sqrt{3}$ (cm)		5	
		問2	(1)	〔説明〕 (例) △OBP は, ∠OBP＝60°, OB＝OP だから，正三角形である。 また，△PBM は 3 辺の長さの比が 1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形だから, ∠PBM＝30° したがって，線分 BQ は線分 OP の垂直二等分線となるので，点 P は点 O と重なる。	6	内容に応じて部分点を認める。
			(2)	$\frac{3\pi-3\sqrt{3}}{2}$ (cm^2)	6	

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-19-公-埼玉-K-05B	5 問題 B	問1	〔説明〕 (例) △OHA と△OHB において, 仮定から, OA＝OB……① ∠OHA＝∠OHB＝90 °……② OH は共通……③ ①, ②, ③から, △OHA と△OHB は直角三角形で, 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので, △OHA≡△OHB		6	要点をおさえ, 論理の筋道がとおっているものは, 正答とする。 内容に応じて部分点を認める。
		問2	(1)	(OH＝) $3\sqrt{2}$ (cm)	5	
			(2)	〔説明〕 (例) 辺 OC 上に OS＝4 cm となる点 S をとる。三角錐 OBCD の展開図において, OR：SR＝OP：SQ＝1：2 よって, $OR=\frac{4}{3}$ また, 点 R から△OPQ にひいた垂線の長さを h とすると, $\frac{4}{3}:h=6:3\sqrt{2}$ $h=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ したがって, 三角錐 OPRQ の体積 V は, $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{9}$ (答え) $\frac{8\sqrt{2}}{9}$ (cm^3)  	7	要点をおさえ, 論理の筋道がとおっているものは, 正答とする。 また, 図に示すことで, 説明の一部を省略したものも, 正答とする。 内容に応じて部分点を認める。

数-19-公-埼玉-KS-01A

1 【問題A】　**問1**　$-2a+5a=(-2+5)a=3a$

問2　$(-8)\div(-4)-1=2-1=1$

問3　$3x^2\div(-y^2)\times 2xy^3=-\dfrac{3x^2\times 2xy^3}{y^2}-6x^3y$

問4　$\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{45}=\dfrac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\sqrt{3^2\times 5}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

問5　和が 6，積が−27 になる 2 数は−3 と 9 だから，$x^2+6x-27=(x-3)(x+9)$

問6　$y=5-3x$…①，$x-2y=4$…②とする。①を②に代入して，$x-2(5-3x)=4$　$x-10+6x=4$　$7x=14$　$x=2$　これを①に代入して，$y=5-3\times 2=-1$

問7　解の公式より，$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

問8　1 次関数の式を $y=ax+b$ とする。a はこの関数のグラフの傾きで，グラフは 2 点(4，3)，(−2，0)を通るから，$a=\dfrac{3-0}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$　$y=\dfrac{1}{2}x+b$ に $x=-2$，$y=0$ を代入して，$0=\dfrac{1}{2}\times(-2)+b$　$b=1$

問9　AE と BC の交点を H とする。三角形の内角と外角の性質より，
△ABH で，∠AHG＝∠ABH＋∠BAH＝60°＋25°＝85°
同様に，△EGH で，∠EGH＝∠AHG－∠HEG
ここで，∠HEG は直角二等辺三角形 DEF の底角だから，∠HEG＝45°
よって，∠EGH＝85°－45°＝40°　対頂角は等しいから，∠CGF＝∠EGH＝40°

問10　**ア**　$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=3^2=9$　よって，$x=3$ のとき $y=9$ だから，正しくない。

イ　正しい。

ウ　$x=0$ のとき $y=0$ で，これが最小値。よって，正しくない。

エ　(変化の割合)$=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{4^2-2^2}{4-2}=\dfrac{12}{2}=6$　よって，正しい。

オ　$x<0$ の範囲では，x の値が増加すると y の値は減少する。よって，正しくない。

問11　**(1)** 赤い布は横 50cm で，5cm ずつ重ねて縫い合わせるから，赤い布が 1 枚増えると全体の長さは 50－5＝45(cm)長くなる。赤い布の枚数が x 枚のときの全体の長さは，$50+45(x-1)=45x+5$(cm)
よって，全体の長さが 5m(＝500cm)となるときの x の値は，$45x+5=500$　$45x=495$　$x=11$

(2) 考えやすくするため，赤い布 x 枚で大きな赤い布 A，白い布 y 枚で大きな白い布 B をつくり，A と B を縫い合わせて 5m にするものとする。
(1)より，A の長さは$(45x+5)$cm，同様に B の長さは $30+25(y-1)=25y+5$(cm)と表されるから，A と B を縫い合わせてできる全体の長さは，$(45x+5)+(25y+5)-5=45x+25y+5$(cm)
したがって，$45x+25y+5=500$　$45x+25y=495$　$9x+5y=99$　これをみたす自然数 x，y の値の組を求めればよい。$y=\dfrac{9(11-x)}{5}$より，x に 1，2，3，…と代入して，y の値が自然数になるものをさがすと，$x=1$ のとき $y=18$，$x=6$ のとき $y=9$

数-19-公-埼玉-KS-01B

1 【問題B】　**問1**　$(-a)^3\div 2a^4\times\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2=-a^3\div 2a^4\times\dfrac{1}{4}a^2=-\dfrac{a^3\times a^2}{2a^4\times 4}=-\dfrac{a}{8}$

問2　$\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{6}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{6}+\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{5-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{6}=\dfrac{5}{6}$

問3　$2x(x+3)=(x+3)^2$　$2x^2+6x=x^2+6x+9=0$　$x^2=9$　よって，$x=\pm 3$

問4　**(1)**　$(1，-2)*(3，1)=(1\times 3-(-2)\times 1，1\times 1+(-2)\times 3)=(5，-5)$

(2) $(x,\ y)*(2,\ 3)=(2x-3y,\ 3x+2y)$だから，$2x-3y=-17$…①，$3x+2y=7$…②
①，②を連立方程式として解くと，①×2＋②×3 より，$13x=-13$　$x=-1$
これを②に代入して，$3\times(-1)+2y=7$　$2y=10$　$y=5$

問5　AE と BC の交点を H とする。三角形の内角と外角の性質より，
△ABH で，∠AHG＝∠ABH＋∠BAH＝60°＋25°＝85°
同様に，△EGH で，∠EGH＝∠AHG－∠HEG
ここで，∠HEG は直角二等辺三角形 DEF の底角だから，∠HEG＝45°
よって，∠EGH＝85°－45°＝40°　対頂角は等しいから，∠CGF＝∠EGH＝40°

問6　**ア**　$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=3^2=9$　よって，$x=3$ のとき $y=9$ だから，正しくない。
イ　正しい。
ウ　$x=0$ のとき $y=0$ で，これが最小値。よって，正しくない。
エ　(変化の割合)$=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{4^2-2^2}{4-2}=\dfrac{12}{2}=6$　よって，正しい。
オ　$x<0$ の範囲では，x の値が増加すると y の値は減少する。よって，正しくない。

問7　はじめに袋の中に入っていた白色のキャップの個数を x 個とする。母集団と標本で，白色のキャップとオレンジ色のキャップの個数の比は等しいと考えられるので，
$x:50=(30-6):6$　$6x=50\times24$　$x=200$

問8　**(1)** 赤い布は横 50cm で，5cm ずつ重ねて縫い合わせるから，赤い布が 1 枚増えると全体の長さは 50－5＝45(cm)長くなる。赤い布の枚数が x 枚のときの全体の長さは，$50+45(x-1)=45x+5$(cm)
よって，全体の長さが 5m(＝500cm)となるときの x の値は，$45x+5=500$　$45x=495$　$x=11$

(2) 考えやすくするため，赤い布 x 枚で大きな赤い布 A，白い布 y 枚で大きな白い布 B をつくり，A と B を縫い合わせて 5m にするものとする。
(1)より，A の長さは$(45x+5)$cm，同様に B の長さは $30+25(y-1)=25y+5$(cm)と表されるから，A と B を縫い合わせてできる全体の長さは，$(45x+5)+(25y+5)-5=45x+25y+5$(cm)
したがって，$45x+25y+5=500$　$45x+25y=495$　$9x+5y=99$　これをみたす自然数 x，y の値の組を求めればよい。$y=\dfrac{9(11-x)}{5}$より，x に 1，2，3，…と代入して，y の値が自然数になるものをさがすと，$x=1$ のとき $y=18$，$x=6$ のとき $y=9$

数-19-公-埼玉-KS-02A

2 【問題A】

問1　はじめに袋の中に入っていた白色のキャップの個数を x 個とする。母集団と標本で，白色のキャップとオレンジ色のキャップの個数の比は等しいと考えられるので，
$x:50=(30-6):6$　$6x=50\times24$　$x=200$

問2　三角錐 PBCD の底面を直角二等辺三角形 BCD とすると，底面積は$\dfrac{1}{2}\times6\times6=18(\text{cm}^2)$
また，高さは P から△BCD にひいた垂線の長さになる。
ここで，∠ABC＝∠ABD＝90°より，AB は△BCD に垂直だから，BD 上に AB//PE となるような点 E をとると，PE も△BCD に垂直になる。よって，高さは PE
AB // PE より，AB：PE＝AD：PD＝(1＋2)：2＝3：2　$PE=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2}{3}\times6=4(\text{cm})$
よって，三角錐 PBCD の体積は，$\dfrac{1}{3}\times18\times4=24(\text{cm}^3)$

問3　105°＝45°＋60°と考え，45°の角は 90°の角の二等分線，60°の角は正三角形の内角を利用して作図するとよい。まず，A を通り AB に垂直な直線をかき，その直線と AB とを 2 辺とする 90°の角の二等分線をかく。さらに，その二等分線上に 1 辺をもつ正三角形をかいて 60°の角をつくる。

問4　平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わり，また，逆に対角線がそれぞれの中点で交わる四角形は平行四辺形である。これらの関係を利用して証明する。

数-19-公-埼玉-KS-02B

2 **【問題B】　問1**　105°＝45°＋60°と考え，45°の角は 90°の角の二等分線，60°の角は正三角形の内角を利用して作図するとよい。まず，A を通り AB に垂直な直線をかき，その直線と AB とを 2 辺とする 90°の角の二等分線をかく。さらに，その二等分線上に 1 辺をもつ正三角形をかいて 60°の角をつくる。

問2　{1，2，3}，{1，2，6}，{1，2，9}，{1，3，5}，{1，3，8}，{1，4，7}，{1，5，6}，{1，5，9}，{1，6，8}，{1，8，9}，{2，3，4}，{2，3，7}，{2，4，6}，{2，4，9}，{2，5，8}，{2，6，7}，{2，7，9}，{3，4，5}，{3，4，8}，{3，5，7}，{3，6，9}，{3，7，8}，{4，5，6}，{4，5，9}，{4，6，8}，{4，8，9}，{5，6，7}，{5，7，9}，{6，7，8}，{7，8，9}の 30 通り。

(別解) 1 から 9 までの自然数のうち，3 で割り切れるもの（余りが 0 のもの）は 3，6，9 の 3 個，3 で割った余りが 1 になるものは 1，4，7 の 3 個，3 で割った余りが 2 になるものは 2，5，8 の 3 個。和が 3 で割り切れるのは，余りの和が 3 で割り切れるときであり，その余りのパターンは

(ⅰ) 取り出した 3 枚のカードの数字を 3 で割った余りがすべて異なる

(ⅱ) 取り出した 3 枚のカードの数字を 3 で割った余りがすべて同じ

のいずれかである。(ⅰ)となる取り出し方は 3×3×3＝27(通り)，(ⅱ)となる取り出し方は{3，6，9}，{1，4，7}，{2，5，8}を取り出す 3 通り。

よって，求める場合の数は，27＋3＝30(通り)

数-19-公-埼玉-KS-03

3 **問1**　直線 $y=ax+2$ の切片は 2 だから，C(0，2)

△OCD で OC＝2cm を底辺と見たとき，高さは点 D の x 座標の値に等しいから 3cm

よって，△OCD の面積は，$\frac{1}{2}\times2\times3=3(\text{cm}^2)$

問2　△ADC と△CDB の底辺をそれぞれ AC，BC とすると，高さはどちらも D から直線 AB にひいた垂線の長さになるから等しい。

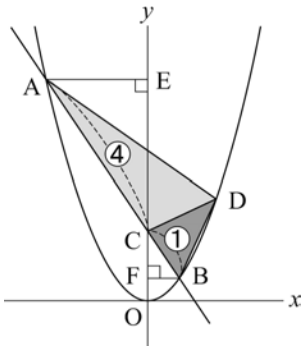
よって，△ADC：△CDB＝4：1 のとき，AC：BC＝4：1 となる。

また，2 点 A，B から y 軸にそれぞれ垂線 AE，BF をひくと，

AE // FB より，AE：BF＝AC：BC＝4：1

よって，点 B の x 座標を t とすると，点 A の x 座標は $-4t$ となる。

A，B はどちらも放物線上の点だから，$y=\frac{1}{2}x^2$ にそれぞれの x 座標の値を代入して y 座標を求めると，$A(-4t,\ 8t^2)$，$B\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$



したがって，$E(0,\ 8t^2)$，$F\left(0,\ \frac{1}{2}t^2\right)$，C(0，2)

EC：FC＝AC：BC＝4：1 だから，$(8t^2-2):\left(2-\frac{1}{2}t^2\right)=4:1$　$8t^2-2=4\left(2-\frac{1}{2}t^2\right)$　$10t^2=10$

$t^2=1$　$t=\pm1$　$t>0$ だから，$t=1$

よって，A(−4，8)だから，$y=ax+2$ に $x=-4$，$y=8$ を代入して，$8=a\times(-4)+2$　$a=-\frac{3}{2}$

数-19-公-埼玉-KS-04

4 **問1**　線分 AB は半円 O の直径だから，∠APB＝90°　よって，△ABP は 60°の角をもつ直角三角形だから，AB：AP＝2：$\sqrt{3}$　$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}(\text{cm})$

また，AM：MP＝2：1 より，PM：AP＝1：(2＋1)＝1：3　$PM=\frac{1}{3}AP=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}(\text{cm})$

問２　**(1)** OB, OP は半径だから, OB＝OP＝3cm　よって, △OBP は底角が 60°の二等辺三角形だから, 正三角形であることがわかる。また, △PBM は∠MPB＝90°で, **問１**より PM＝$\sqrt{3}$cm, PB＝3cm だから, PM：PB＝$\sqrt{3}$：3＝1：$\sqrt{3}$　したがって, △PBM は PM：BM：PB＝1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形で, ∠PBM＝30°だから, 線分 BM は正三角形 OBP の∠OBP の二等分線になる。二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから, OR＝PR, ∠ORB＝∠PRB＝90°　よって, 線分 BQ を折り目として折ったとき, 点 P は点 O と重なる。

(2) 線分 OM を M のほうに延長し, $\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$との交点を R とする。かげをつけた部分の図形は, 線分 OR を対称の軸とする線対称な図形だから, 求める面積は, おうぎ形 ORP の面積から△OMP の面積をひいて, それを 2 倍した値になる。∠ROP＝∠ROB－∠POB＝90°－60°＝30°で, OP＝3cm だから,

おうぎ形 ORP の面積は, $\pi\times3^2\times\dfrac{30}{360}=\dfrac{3}{4}\pi$(cm^2)

また, △OBM は∠OBM＝30°の直角三角形だから, OM：OB＝1：$\sqrt{3}$　OM＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$OB＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times3=\sqrt{3}$(cm)

さらに, P から線分 OR に垂線 PS をひくと, △OPS は∠POS＝30°の直角三角形だから,

PS：OP＝1：2　PS＝$\dfrac{1}{2}$OP＝$\dfrac{1}{2}\times3=\dfrac{3}{2}$(cm)

よって, △OMP＝$\dfrac{1}{2}\times$OM$\times$PS＝$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$(cm^2)

したがって, かげをつけた部分の面積は, $\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times2=\dfrac{3\pi-3\sqrt{3}}{2}$(cm^2)

数-19-公-埼玉-KS-05B

5　**【問題Ｂ】**　**問１**　OH⊥面 ABCD だから, OH は面 ABCD 上の点 H を通るすべての直線に垂直になる。よって, ∠OHA＝∠OHB＝90°が成り立つ。

問２　**(1)** H は正方形 ABCD の対角線 AC, BD の交点になるから, AH＝$\dfrac{1}{2}$AC　△ABC は直角二等辺三角形だから, AB：AC＝1：$\sqrt{2}$　AC＝$\sqrt{2}$AB＝$\sqrt{2}\times6=6\sqrt{2}$(cm)　よって, AH＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$(cm)

△OAH で三平方の定理より, OH^2＝OA^2－AH^2＝6^2－$(3\sqrt{2})^2$＝18

OH＞0 だから, OH＝$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$(cm)

(2) △OBD は OB＝OD＝6cm で, BD＝AC＝$6\sqrt{2}$cm だから,

OB：OD：BD＝6：6：$6\sqrt{2}$＝1：1：$\sqrt{2}$

したがって, △OBD は∠BOD＝90°の直角二等辺三角形である。

よって, △OPQ＝$\dfrac{1}{2}\times$OP$\times$OQ＝$\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$(cm^2)

これを三角錐 OPRQ の底面とすると, 高さは R から△OPQ にひいた垂線 RI の長さになる。I は線分 OH 上にあって, RI//CH となるから,

RI：CH＝OR：OC…①

また, 右下の展開図で, △OBC, △OCD は 1 辺 6cm の正三角形だから, 辺 OC 上に OS＝4cm となる点 S をとると, △OSQ は 1 辺 4cm の正三角形になる。∠POS＝∠OSQ＝60°で, 錯角が等しいから OP // QS　よって, OR：SR＝OP：SQ＝2：4＝1：2

OR：OS＝1：(1＋2)＝1：3　OR＝$\dfrac{1}{3}$OS＝$\dfrac{1}{3}\times4=\dfrac{4}{3}$(cm)

ここで, CH＝AH＝$3\sqrt{2}$cm だから, RI＝$h$cm とすると, ①より,

h：$3\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}$：6　$6h=4\sqrt{2}$　$h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

三角錐 OPRQ の体積は,

$\dfrac{1}{3}\times$△OPQ$\times h=\dfrac{1}{3}\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$(cm^3)

