H29　栃木県　公立　数学　問題

数-17-公-栃木-問-01

1　次の**問１**～**問 14** に答えなさい。

問１　$3\times(-4)$　を計算しなさい。

問２　$\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x$　を計算しなさい。

問３　$2(a-3b)+3(a+b)$　を計算しなさい。

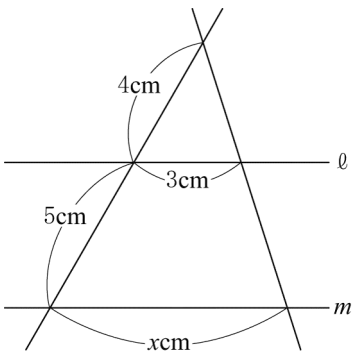
問４　x^2-6x　を因数分解しなさい。

問５　$y=\frac{x-7}{5}$　を x について解きなさい。

問６　x についての方程式　$ax+9=5x-a$　の解が 6 であるとき，a の値を求めなさい。

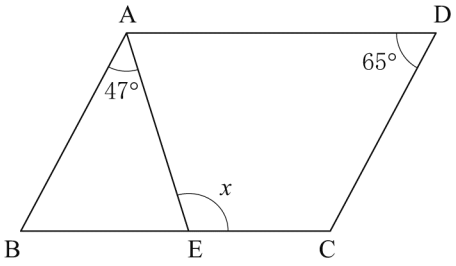
問７　y は x に比例し，$x=2$　のとき　$y=-8$　である。$x=-1$　のときの y の値を求めなさい。

問８　右の図のように，平行な 2 つの直線 ℓ，m に 2 直線が交わっている。x の値を求めなさい。



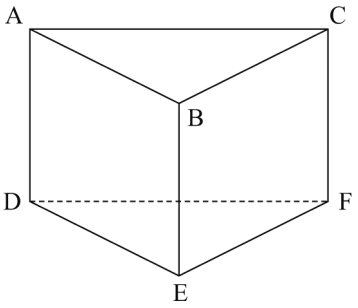
問９　1 個のさいころを 1 回投げるとき，出る目の数が 4 でない確率を求めなさい。

問 10 右の図において，四角形 ABCD は平行四辺形である。$\angle x$ の大きさを求めなさい。



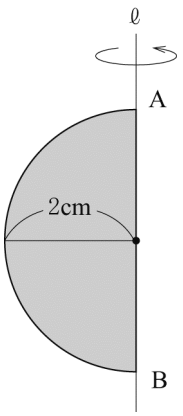
問 11 n を正の整数とする。$\sqrt{45n}$ が整数となる n の値のうち，最も小さい n の値を求めなさい。

問 12 右の図の三角柱 ABC－DEF において，辺 AD とねじれの位置にある辺をすべて答えなさい。



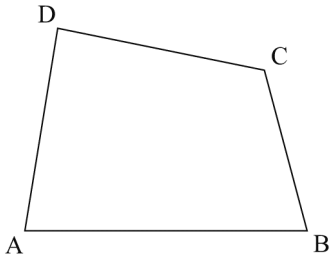
問 13 関数　$y=2x^2$　について，x の変域が　$-2 \leqq x \leqq 3$　のときの y の変域を求めなさい。

問 14 右の図のような半径 2 cm の半円を，直径 AB を含む直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



2 次の**問１**，**問２**，**問３**に答えなさい。

問１　右の図の四角形 ABCD において，2 辺 AB，AD からの距離が等しく，辺 CD 上にある点 P を作図によって求めなさい。ただし，作図には定規とコンパスを使い，また，作図に用いた線は消さないこと。



問２　ある中学校の生徒会が，全校生徒 525 人のうち，冬休みに家の手伝いをした生徒のおよその人数を調べることになり，40 人を無作為に抽出する標本調査を行った。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 標本の選び方として適切なものを，次の**ア**，**イ**，**ウ**，**エ**のうちから 1 つ選んで記号で答えなさい。ただし，くじ引きを行うとき，その対象の中からの生徒の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

ア　2 年生の中から 40 人をくじ引きで選ぶ。

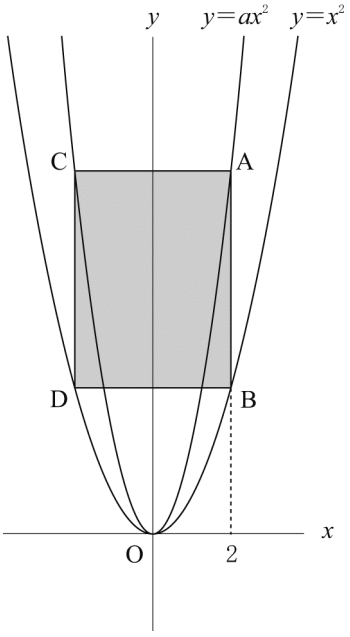
イ　男子生徒 267 人の中から 40 人をくじ引きで選ぶ。

ウ　生徒全員の中から 40 人をくじ引きで選ぶ。

エ　運動部員の中から 20 人，文化部員の中から 20 人の計 40 人をくじ引きで選ぶ。

(2) 抽出された 40 人のうち，冬休みに家の手伝いをした生徒は 32 人であった。この中学校で，冬休みに家の手伝いをした生徒のおよその人数を求めなさい。

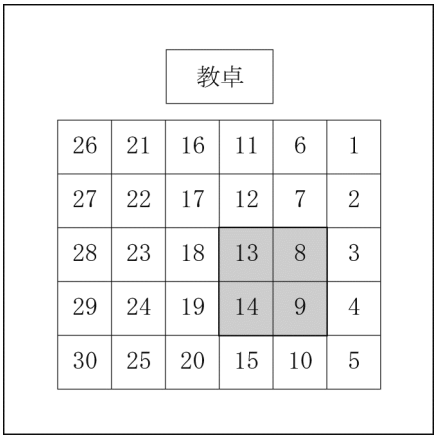
問３　右の図のように，2 つの関数 $y=ax^2$ $(a>1)$，$y=x^2$ のグラフ上で，x 座標が 2 である点をそれぞれ A，B とする。また，点 A を通り x 軸に平行な直線が，関数 $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち，点 A と異なる点を C とし，点 B を通り x 軸に平行な直線が，関数 $y=x^2$ のグラフと交わる点のうち，点 B と異なる点を D とする。長方形 ACDB の面積が 24 であるとき，a の値を求めなさい。



数-17-公-栃木-問-03

3 次の**問１**，**問２**に答えなさい。

問１　右の図は，あるクラスの座席を出席番号で表したものである。



この図中の

13	8
14	9

のような 4 つの整数の組

c	a
d	b

について考える。

このとき，$bc-ad$ の値はつねに 5 になることを，a を用いて証明しなさい。

問２　あおいさんの自宅からバス停までと，バス停から駅までの道のりの合計は 3600 m である。ある日，あおいさんは自宅からバス停まで歩き，バス停で 5 分間待ってから，バスに乗って駅に向かったところ，駅に到着したのは自宅を出発してから 20 分後であった。あおいさんの歩く速さは毎分 80 m，バスの速さは毎分 480 m でそれぞれ一定とする。

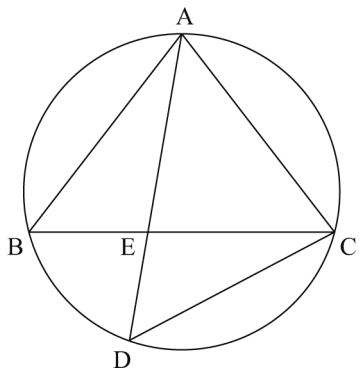
このとき，あおいさんの自宅からバス停までの道のりを x m，バス停から駅までの道のりを y m として連立方程式をつくり，自宅からバス停までとバス停から駅までの道のりをそれぞれ求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

数-17-公-栃木-問-04

4 次の**問１**，**問２**に答えなさい。

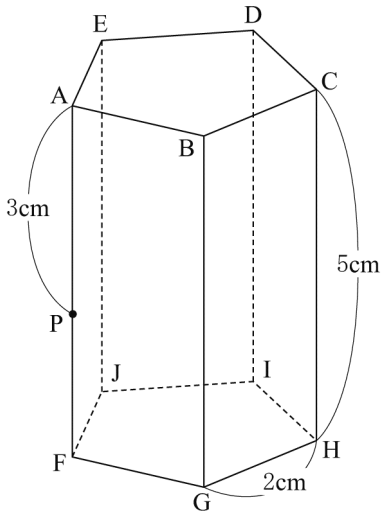
問１　右の図のように，円周上の 3 点 A，B，C を頂点とする△ABC があり，AB＝AC である。点 A を含まない方の弧 BC 上に点 D をとり，AD と BC の交点を E とする。

このとき，△ADC∽△ACE であることを証明しなさい。



問２　右の図のような，底面が１辺２ cm の正五角形で高さが５ cm である正五角柱 ABCDE－FGHIJ があり，辺 AF 上に AP＝3 cm となる点 P がある。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。



(1) 正五角柱 ABCDE－FGHIJ の側面上に点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線の長さを求めなさい。

(2) 正五角柱 ABCDE－FGHIJ の体積を S cm^3，五角錐(すい)P－FGHIJ の体積を T cm^3 とする。このとき，２つの図形の体積の比 S：T を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

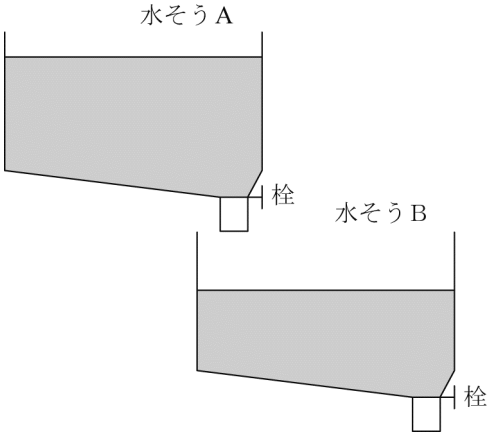
数-17-公-栃木-問-05

5　**図１**のように，２つの水そう A，B がある。どちらの水そうにも毎分一定の量で排水できる栓(せん)がついており，その量は変えることができる。また，水そう A からの排水はすべて水そう B に入ることとし，２つの水そうは十分に大きく，水があふれることはないものとする。

２つの水そうの栓を閉じて，２つの水そうに水を入れた状態から，同時に排水することを２回行った。排水を始めてから x 分後の水そう B の水の量を y L とする。

このとき，次の**問１**，**問２**に答えなさい。

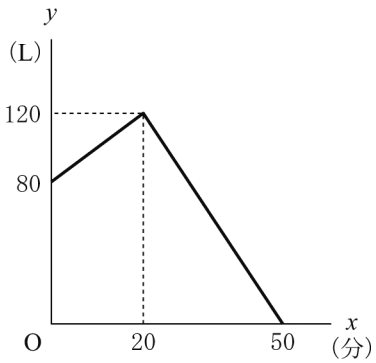
図１



問１　１回目は，水そう A に 120 L，水そう B に 80 L の水を入れた状態から，水そう A は毎分６L，水そう B は毎分４L の割合で同時に排水を始めた。**図２**は，x と y の関係を表したグラフである。

このとき，次の(1)，(2)，(3)の問いに答えなさい。

図２



(1) 排水を始めてから３分後の水そう B の水の量は何 L か。

(2) 水そう A と水そう B の水の量が初めて等しくなるのは，排水を始めてから何分後か。

(3) 排水を始めて 20 分後から 50 分後までの x と y の関係を式で表しなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

問２　２回目は，水そう A に 150 L，水そう B に 110 L の水を入れた状態から，水そう A は毎分 6 L，水そう B は毎分 7 L の割合で同時に排水を始めた。水そう A の水がなくなった後，しばらく時間がたってから，水そう B を毎分 4 L の割合で排水するように変えたところ，同時に排水を始めてから 40 分後に水そう B の水がなくなった。水そう B の排水を毎分 4 L に変えたのは，同時に排水を始めてから何分何秒後か。

数-17-公-栃木-問-06

6　**図１**のような１辺１ cm の立方体の，色が塗(ぬ)られていない積木(つみき)A がたくさんある。これらをすき間がないように並べたり積み上げたりして直方体をつくる。

図１

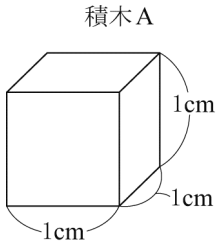


図２のように，垂直に交わる２つの壁とそれらに垂直に交わる床があり，これらの２つの壁と床に，つくった直方体を接するように置く。この直方体の２つの壁と床に接していない残りの３つの面に色を塗り，これを直方体 B とし，縦，横，高さをそれぞれ a cm，b cm，c cm とする。

例えば，**図３**は $a=3$, $b=3$, $c=2$ の直方体 B であり，色が塗られた面の面積の合計は 21 cm^2 となり，1 面だけに色が塗られた積木 A は 8 個となる。

このとき，次の**問１**，**問２**，**問３**に答えなさい。

図２

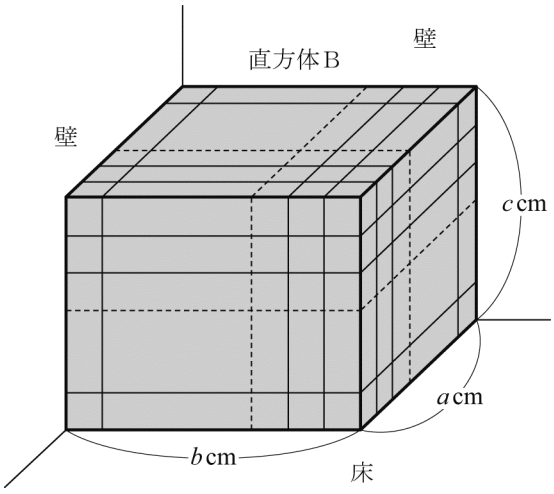
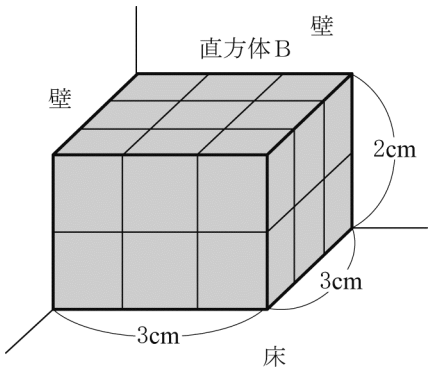


図３



問１　$a=4$，$b=5$，$c=3$ である直方体 B について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 用いた積木 A の個数を求めなさい。

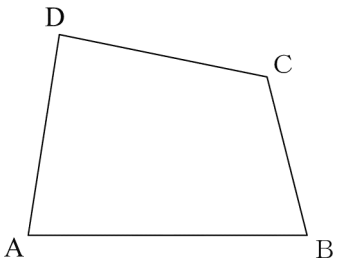
(2) 色が塗られた面の面積の合計を求めなさい。

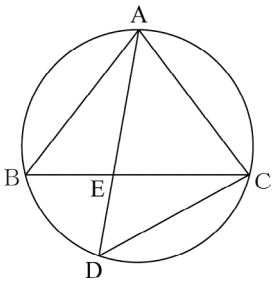
問２　底面が正方形で，$c=5$ である直方体 B について，1 面だけに色が塗られた積木 A は 65 個であった。このとき，底面の正方形の 1 辺の長さを x cm として方程式をつくり，x の値を求めなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

問３　84 個の積木 A をすべて用いて直方体 B をつくる。このとき，ちょうど 2 面に色が塗られる積木 A は何個か，考えられる個数のうち最も少ない個数を求めなさい。

数学　解答用紙

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-17-公-栃木-KY-01	1	問１			
		問２			
		問３			
		問４			
		問５	$x=$		
		問６	$a=$		
		問７	$y=$		
		問８	$x=$		
		問９			
		問 10	度		
		問 11	$n=$		
		問 12			
		問 13			
		問 14	cm^3		

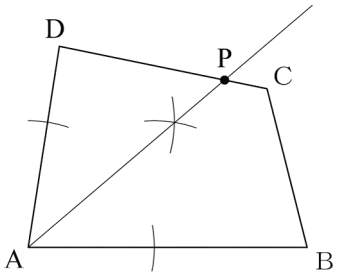
	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-17-公-栃木-KY-02	2	問１			
		問２	(1)		
			(2)　およそ　　人		
		問３	a＝		
数-17-公-栃木-KY-03	3	問１	〔証明〕		
		問２	答え（自宅からバス停まで　　m，バス停から駅まで　　m）		

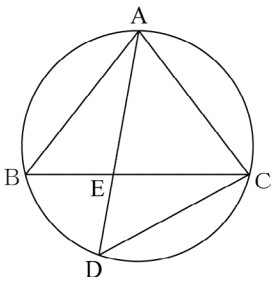
	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数−17−公−栃木−KY−04	4	問１	 〔証明〕			
		問２	(1)	cm		
			(2)	S : T＝　　:		

	問題番号		解答		配点	備考
数-17-公-栃木-KY-05	5	問1	(1)	L		
			(2)	分後		
			(3)	答え（　　）		
		問2	分　　秒後			
数-17-公-栃木-KY-06	6	問1	(1)	個		
			(2)	cm^2		
		問2	答え（x=　　）			
		問3	個			

数学　解答

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-17-公-栃木-K-01	1	問１	-12	2	
		問２	$\frac{1}{4}x$	2	
		問３	$5a-3b$	2	
		問４	$x(x-6)$	2	
		問５	$(x=)\quad 5y+7$	2	
		問６	$(a=)\quad 3$	2	
		問７	$(y=)\quad 4$	2	
		問８	$(x=)\quad \frac{27}{4}$	2	
		問９	$\frac{5}{6}$	2	
		問 10	112　(度)	2	
		問 11	$(n=)\quad 5$	2	
		問 12	辺 BC，辺 EF	2	
		問 13	$0 \leqq y \leqq 18$	2	
		問 14	$\frac{32}{3}\pi$　(cm^3)	2	

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数−17−公−栃木−K−02	2	問１	(例)  	4	
		問２	(1)　ウ	2	
			(2)　(およそ)　420　(人)	2	
		問３	$(a=)\ \dfrac{5}{2}$	4	
数−17−公−栃木−K−03	3	問１	〔証明〕 (例) $b=a+1$，$c=a+5$，$d=a+6$ と表される。 よって $bc-ad=(a+1)(a+5)-a(a+6)$ $=a^2+6a+5-a^2-6a$ $=5$ したがって $bc-ad$ の値はつねに 5 になる。	6	
		問２	(例) $\begin{cases} x+y=3600 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{x}{80}+5+\dfrac{y}{480}=20 & \cdots\cdots② \end{cases}$ ②より $6x+y=7200$　……③ ①−③より　$-5x=-3600$ よって $x=720$ ①に代入して $720+y=3600$ したがって $y=2880$ この解は問題に適している。 答え（自宅からバス停まで　720 m，バス停から駅まで　2880m）	6	

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-17-公-栃木-K-04	4	問１		〔証明〕 (例) △ADC と△ACE において 共通な角であるから ∠DAC＝∠CAE……① 弧 AC に対する円周角の大きさは等しいから ∠ABC＝∠ADC……② 仮定より△ABC は二等辺三角形であるから 2 つの底角は等しいので ∠ABC＝∠ACE……③ ②，③より ∠ADC＝∠ACE……④ ①，④より 2 組の角がそれぞれ等しいから △ADC∽△ACE	7	
		問２	(1)	$2\sqrt{5}$　(cm)	3	
			(2)	(S : T＝)　15 : 2	3	

	問題番号		解　　答		配点	備　　考
数-17-公-栃木-K-05	5	問１	(1)	86 (L)	2	
			(2)	5 (分後)	3	
			(3)	(例) 排水を始めて 20 分後から 50 分後までのグラフの傾きは $\frac{0-120}{50-20}=-4$ であるから，x と y の関係の式は $y=-4x+b$ と表される。 グラフは点 (50，0) を通るから $0=-4\times50+b$ よって $b=200$ したがって，求める式は $y=-4x+200$ 答え ($y=-4x+200$)	7	
		問２	33 (分) 20 (秒後)		5	
数-17-公-栃木-K-06	6	問１	(1)	60 (個)	2	
			(2)	47 (cm^2)	3	
		問２	(例) 1 面だけに色が塗られた積木 A が 65 個だから $(x-1)^2+4(x-1)\times2=65$ $x^2+6x-72=0$ $(x+12)(x-6)=0$ $x=-12$，$x=6$ x は正の整数だから，$x=6$ 答え ($x=6$)		7	
		問３	11 (個)		6	

数-17-公-栃木-KS-01

1　問1　$3\times(-4)=-(3\times4)=-12$

問2　$\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4}x=\frac{1}{4}x$

問3　$2(a-3b)+3(a+b)=2a-6b+3a+3b=5a-3b$

問4　$x^2-6x=x\times x+x\times(-6)=x(x-6)$

問5　$y=\frac{x-7}{5}$　右辺と左辺を入れかえ，両辺に5をかけると，$x-7=5y$　-7 を右辺に移項して，$x=5y+7$

問6　$ax+9=5x-a$ に $x=6$ を代入すると，$a\times6+9=5\times6-a$　$6a+9=30-a$　$7a=21$　$a=3$

問7　求める式を $y=ax$ として，$x=2$，$y=-8$ を代入すると，$-8=a\times2$　$2a=-8$　$a=-4$
$y=-4x$ に $x=-1$ を代入すると，$y=-4\times(-1)=4$

問8　平行線と線分の比の関係から，$4:(4+5)=3:x$　$4:9=3:x$　$4x=27$　$x=\frac{27}{4}$

問9　1個のさいころを投げるときの目の出方は全部で6通りだから，出る目の数が4になる確率は $\frac{1}{6}$ になるので，出る目の数が4でない確率は，$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

問10　四角形ABCDは平行四辺形だから，$\angle ABE=\angle CDA=65^\circ$
△ABEで，三角形の内角・外角の性質より，$\angle x=\angle BAE+\angle ABE=47^\circ+65^\circ=112^\circ$

問11　$\sqrt{45n}=\sqrt{3^2\times5\times n}=3\sqrt{5\times n}$ だから，$n=5$

問12　辺ADとねじれの位置にある辺は，辺ADと平行でなく交わらない辺だから，辺BC，EF

問13　x の変域に0を含んでいるので，y の値が最小となるのは，$x=0$ のときで，$y=0$
y の値が最大となるのは，-2 と3で絶対値の大きい $x=3$ のときで，$y=2\times3^2=18$　よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq18$

問14　半径2 cmの球ができるから，求める体積は，$\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32}{3}\pi(\mathrm{cm}^3)$

数-17-公-栃木-KS-02

2　問1　2辺AB，ADからの距離が等しい点は，$\angle DAB$ の二等分線上にある。
よって，$\angle DAB$ の二等分線と辺CDの交点がPとなる。

問2　(1) 母集団(全校生徒525人)を代表するように，かたよりなく標本を選ばなくてはならない。
(2) 抽出された40人において，冬休みに家の手伝いをした生徒の割合は，$32\div40=0.8$
全校生徒525人においても，冬休みに家の手伝いをした生徒の割合は0.8であると考えられるから，$525\times0.8=420$ より，およそ420人となる。

問3　条件から，点Aの y 座標と点Cの y 座標は等しくなり，この2点は y 軸について対称である。
よって，点Aの x 座標と点Cの x 座標の絶対値は等しい。
点Aの x 座標は2だから，点Aの y 座標は，$y=ax^2$ に $x=2$ を代入して，$y=a\times2^2=4a$
A$(2,\ 4a)$より，C$(-2,\ 4a)$
同様に，点Bの y 座標と点Dの y 座標は等しくなり，この2点は y 軸について対称である。
よって，点Bの x 座標と点Dの x 座標の絶対値は等しい。
点Bの x 座標は2だから，点Bの y 座標は，$y=x^2$ に $x=2$ を代入して，$y=2^2=4$
B$(2,\ 4)$より，D$(-2,\ 4)$
長方形ACDBの縦の長さは $4a-4$，横の長さは $2-(-2)=4$ であり，その面積は24だから，
$(4a-4)\times4=24$　整理をすると，$a=\frac{5}{2}$

数-17-公-栃木-KS-03

3 **問１**　a を用いて証明するために，b，c，d をそれぞれ a の式で表す。

b は a より 1 大きい。c は a より 5 大きく，d は c より 1 大きいから，$b=a+1$，$c=a+5$，

$d=c+1=(a+5)+1=a+6$ と表せ，これらを $bc-ad$ に代入する。

$bc-ad=(a+1)(a+5)-a(a+6)=a^2+6a+5-a^2-6a=5$

したがって，$bc-ad$ の値はつねに 5 になる。

問２　あおいさんの自宅からバス停までと，バス停から駅までの道のりの合計は 3600m であるから，

$x+y=3600$…①

あおいさんが自宅からバス停まで，毎分 80m の速さで歩くときにかかった時間は，$x\div80=\frac{x}{80}$(分)

バス停から駅まで，毎分 480m の速さのバスに乗って行くときにかかった時間は，$y\div480=\frac{y}{480}$(分)

あおいさんが駅に到着したのは自宅を出発してから 20 分後であったから，$\frac{x}{80}+5+\frac{y}{480}=20$…②

①と②を連立方程式として解く。②より，$6x+y=7200$…③

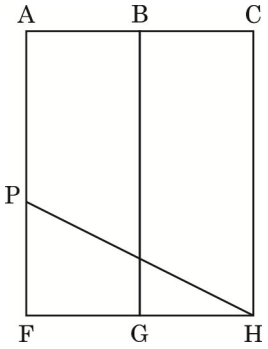
①－③より，$x-6x=3600-7200$　$-5x=-3600$　$x=720$…④

①に④を代入して，$720+y=3600$　$y=2880$　この解は問題に適している。

数-17-公-栃木-KS-04

4 **問１**　円周角の定理と二等辺三角形の 2 つの底角の大きさが等しくなることから，∠ABC＝∠ACE を導く。これと仮定から証明をする。

問２　(1) 右の図のように，正五角柱の展開図の一部をかいて考える。



点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線は，

右の図の線分 PH で表される。

求める長さを $x$cm とすると，右の図の△PFH において，

三平方の定理より，$(5-3)^2+(2+2)^2=x^2$　$2^2+4^2=x^2$　$x^2=20$

$x>0$ だから，$x=2\sqrt{5}$

(2) 正五角柱 ABCDE－FGHIJ と五角錐 P－FGHIJ において，底面 FGHIJ の面積を y cm^2 とすると，

正五角柱 ABCDE－FGHIJ の体積は，$y\times5=5y$ (cm^3)

五角錐 P－FGHIJ の体積は，$\frac{1}{3}\times y\times2=\frac{2}{3}y$ (cm^3)

よって，S：T＝$5y:\frac{2}{3}y=5:\frac{2}{3}=15:2$

数-17-公-栃木-KS-05

5 **問１**　(1)　水そう A から 3 分間に排水される水の量は，$6\times3=18$ (L)

水そう B から 3 分間に排水される水の量は，$4\times3=12$ (L)

よって，求める水の量は，$80+18-12=86$ (L)

(2) 水そう A の水がなくなるのは，排水を始めてから $120\div6=20$ (分後) だから，

水そう A と水そう B の水の量が初めて等しくなるのは，$0\leqq x\leqq20$ のときである。

図２のグラフより，$0\leqq x\leqq20$ のときの x と y の関係は $y=2x+80$ と表される。

また，排水を始めてから x 分後の水そう A の水の量は，$120-6x$ (L) と表されるから，

$120-6x=2x+80$　$-8x=-40$　$x=5$　この解は問題に適している。

(3) **図２**より，$20\leqq x\leqq50$ のときのグラフの傾きは，2 点 (20，120)，(50，0) を通ることから，

$\frac{0-120}{50-20}=\frac{-120}{30}=-4$ となる。よって，求める式は，$y=-4x+b$ と表される。

$y=-4x+b$ に $x=50$，$y=0$ を代入すると，$0=-4\times50+b$　$b=200$　したがって，$y=-4x+200$

問２　水そう A の水がなくなるのは，排水を始めてから 150÷6＝25 (分後) だから，
排水を始めてから 25 分後の水そう B の水の量は，110＋150－7×25＝85 (L)
この 85L の水を，40－25＝15(分)で排水したことになる。
その 15 分間の排水において，毎分 7 L の割合で排水した時間を t 分とすると，
毎分 4 L の割合で排水した時間は，$15-t$ (分) と表されるから，
$7t+4(15-t)=85$ が成り立ち，整理をすると，$t=\dfrac{25}{3}$
よって，水そう B の排水を毎分 4 L に変えたのは，同時に排水を始めてから $25+\dfrac{25}{3}=\dfrac{100}{3}$(分後)
$\dfrac{100}{3}$ 分＝33 分 20 秒より，33 分 20 秒後である。この解は問題に適している。

数-17-公-栃木-KS-06

6　**問１**　(1)　4×5×3＝60 (個)
(2)　4×5＋4×3＋5×3＝47 (cm^2)
※問２，問３においては，a cm の辺と b cm の辺がある長方形の面を P，a cm の辺と c cm の辺がある長方形の面を Q，b cm の辺と c cm の辺がある長方形の面を R とする。
問２　条件より，$a=b=x$，$c=5$ である。
P，Q，R のそれぞれについて，1 面だけに色が塗られた積木 A の個数を調べる。
P は$(x-1)^2=x^2-2x+1$ (個)，Q は$(5-1)(x-1)=4x-4$ (個)，R は Q と等しく $4x-4$ (個) となる。
よって，$(x^2-2x+1)+(4x-4)+(4x-4)=65$　整理すると，$(x-6)(x+12)=0$ となり，x は正の整数だから，$x=6$
問３　ちょうど 2 面に色が塗られる積木 A の個数を調べる。
色が塗られる 2 面が P と Q にそれぞれ含まれる積木 A の個数は，$a-1$ (個)
色が塗られる 2 面が P と R にそれぞれ含まれる積木 A の個数は，$b-1$ (個)
色が塗られる 2 面が Q と R にそれぞれ含まれる積木 A の個数は，$c-1$ (個)
よって，ちょうど 2 面に色が塗られる積木 A の個数は，
$(a-1)+(b-1)+(c-1)=a+b+c-3$ (個)
積が 84 となる 3 つの正の整数の組み合わせを調べると，(1，1，84)，(1，2，42)，(1，3，28)，(1，4，21)，(1，6，14)，(1，7，12)，(2，2，21)，(2，3，14)，(2，6，7)，(3，4，7)
の 10 組があり，考えられる直方体 B は 10 種類である。
a，b，c に各組の 3 つの正の整数をどのように代入しても，$a+b+c-3$ の値は同じになる。
$a+b+c-3$ の値が最も小さい組は (3，4，7) で，その値は 11 となる。
よって，求める個数は 11 個である。